ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE

1981 Programme M MATHEMATIQUES II (4 h)

Centres à l'étranger

N.B. Les questions 6° et 7° peuvent être traitées après la question 2°.

Données

* L'espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

* Dans tout le problème le temps t décrit $]0,\frac{\pi}{2}[$, et toutes les fonctions qui interviennent sont définies sur $]0,\frac{\pi}{2}[$. On considère :

- La fonction vectorielle $\vec{U}$ définie par :

$$\vec{U}(t) = \cos 2t \sin 2t\ \vec{i} + (\sin 2t)^2\ \vec{j} + \cos 2t\ \vec{k}$$

(On notera que $\|\vec{U}(t)\| = 1$ pour tout t) ;

-Le point mobile m défini par : $\overrightarrow{Om}(t) = f(t)\ \vec{k}$, où f est une fonction à valeurs réelles, supposée dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$;

-Le point mobile M défini par : $\overrightarrow{mM}(t) = 2\ \vec{U}(t)$. On désigne par Γ la trajectoire du point M.

Questions

1°/ Montrer qu'il existe une unique fonction f vérifiant les deux conditions : $f(\frac{\pi}{4}) = 0$; les fonctions $\|\frac{\overrightarrow{dm}}{dt}\|$ et $\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\|$ sont égales.
Déterminer cette fonction.

2°/ Dans toute la suite, f désigne la fonction obtenue au 1°.
Construire les projections orthogonales de Γ sur les trois faces du trièdre $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On montrera que Γ admet un axe de symétrie. On calculera des valeurs approchées à 10^{-3} près des coordonnées des positions de m et de M pour $t = \frac{\pi}{12}$, $t = \frac{\pi}{8}$ et $t = \frac{\pi}{4}$.

3°/ Déterminer le centre de courbure et la torsion de Γ au point qui correspond à : $t = \frac{\pi}{4}$.

4°/ On considère les fonctions $\vec{V}$ et $\vec{W}$ définies par :

$$\vec{V} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{U}}{\|\vec{k}\wedge\vec{U}\|} \quad ; \quad \vec{W} = \vec{U}\wedge\vec{V} \ .$$

$\mathcal{S}$ désigne le solide (mobile par rapport à $\mathcal{E}$) qui est lié au repère $(m;\vec{U},\vec{V},\vec{W})$.
Déterminer le vecteur rotation intantanée $\vec{\Omega}(t)$ et l'axe instantané $\Delta(t)$, à l'instant t, dans le mouvement de $\mathcal{S}$.
Montrer que le plan qui contient $\Delta(t)$ et m(t) est perpendiculaire au plan qui contient $\Delta(t)$ et est parallèle à $\vec{k}$.

5°/ Pour $t \in]0,\frac{\pi}{2}[$ donné, comparer :
-les angles de $\overrightarrow{mM}(t)$ avec $\vec{k}$ et $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)$;
-les angles de $\vec{\Omega}(t)$ avec $\vec{k}$ et $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)$;
-les distances de m(t) et M(t) à $\Delta(t)$.

6°/ Soit (m_1,m_2) un couple de points de la droite $D = (O;\vec{k})$; m_1 et m_2 sont les positions du mobile m à des instants t_1 et t_2 ; on note M_1 et M_2 les positions correspondantes du mobile M et on pose :

$$\delta(m_1,m_2) = \|\overrightarrow{M_1M_2}\| \ .$$

Montrer que l'on définit ainsi une application δ de DxD dans R_+ qui est une distance sur D.

7°/ On désigne par ω,ω',σ' les positions respectives du mobile m aux instants $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{8}$.

a) Les points ω' et σ' appartiennent-ils à la boule ouverte B de l'espace métrique (D,δ) dont le centre est ω et dont le rayon est 2 ? B est-elle une boule de la droite D munie de la distance euclidienne ?

b) Soit A le segment $[\omega,\omega']$ de la droite affine euclidienne D.
On pose $\mu(A) = \sup_{(m_1,m_2)\in AxA} \delta(m_1,m_2)$

$\mu(A)$ et $\delta(\omega,\omega')$ sont-ils égaux ?

XXXXXXX

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail